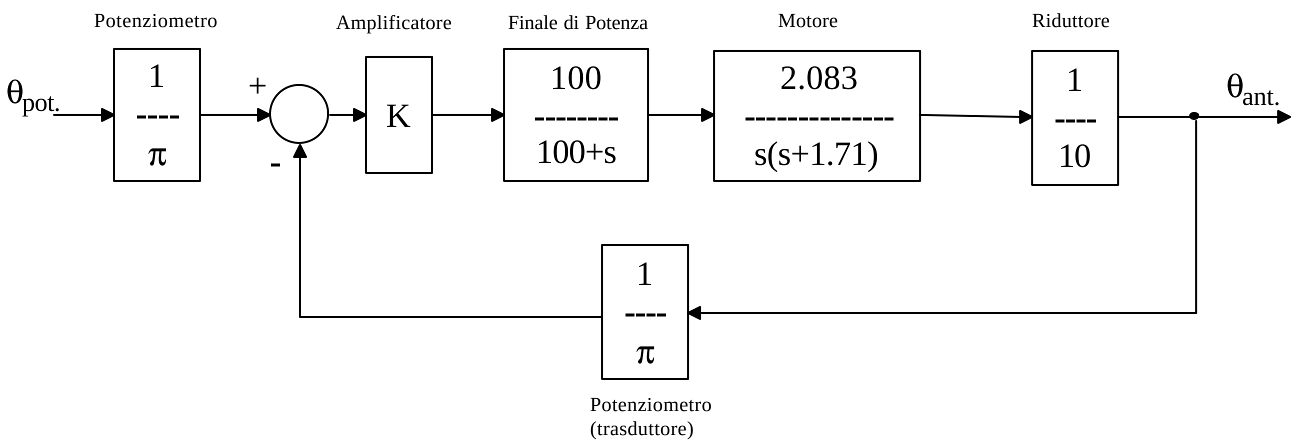
Studio di un sistema di posizionamento azimutale di un'antenna parabolica



- **Studio del Sistema in Anello Aperto (K=1)**

- **Studio del Sistema in Anello Chiuso (K=1)**

- **Studio per K=10**

- **Studio per K=50**

- **Specifiche del sistema**

- **Luogo delle Radici**

- **Criterio di Routh**

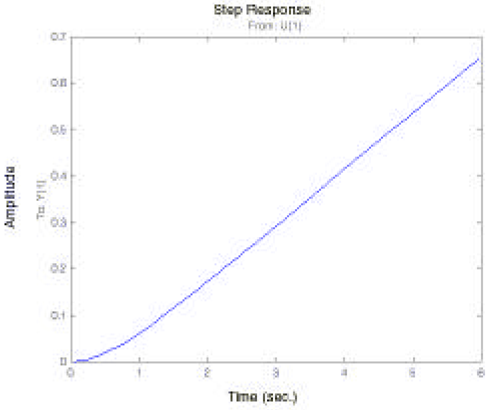
- **Esempi di Sintesi**

Studio del Sistema in Anello Aperto (K=1)

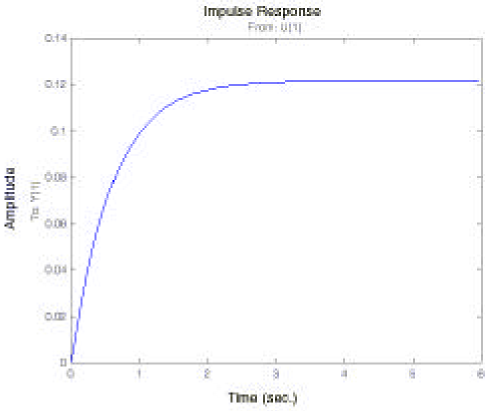
$$G(s) = \frac{20.83}{s^3 + 101.71s^2 + 171s}$$

$$H(s) = \frac{1}{p}$$

La risposta al gradino del sistema in Anello Chiuso diverge:



Ciò è dovuto alla presenza del polo nell'origine (Sistema Semplicemente Stabile), infatti la sua risposta all'impulso è:



In Anello Aperto: un polo nell'origine → Sistema di tipo 1, quindi non avrò errori di posizione!

Studio del Sistema in Anello Chiuso (K=1)

Ora chiudo in retroazione:

$$G_0(s) = \frac{65.44}{ps^3 + 319.53s^2 + 537.21s + 20.83}$$

Divido `num0` e `den0` per p, in modo da mettere in evidenza i poli:

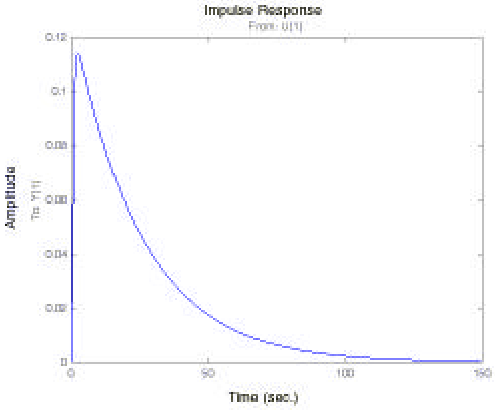
$$G_0(s) = \frac{20.83}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.6304}$$

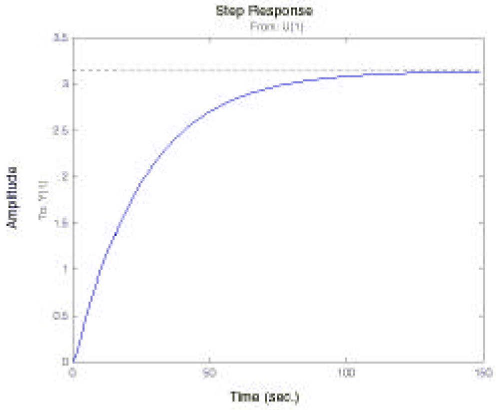
Poiché tutti i poli della $G_0(s)$ sono a parte Reale < 0:

```
roots(den0)
-100.0007
-1.6696
```

```
-0.0397
```

il sistema in Anello Chiuso è Asintoticamente Stabile, infatti le sue risposte all'impulso e al gradino sono:





Quindi abbiamo visto che chiudendo il sistema in retroazione siamo riusciti a stabilizzarlo.

Vediamo ora cosa succede se aumento il guadagno K dell'amplificatore.

Studio per K=10

```
numG=numG*10
```

ridefinisco la $G_0(s)$ con `feedback`:

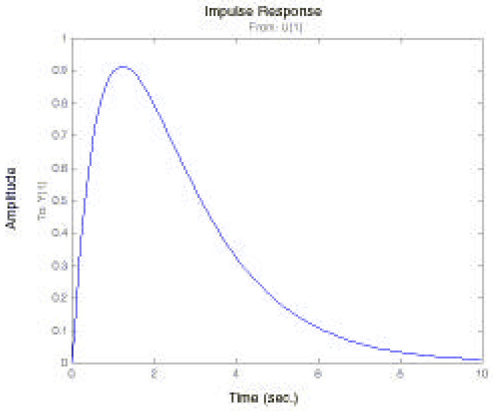
```
[num0,den0]=feedback(numG,denG,numH,denH,-1)
```

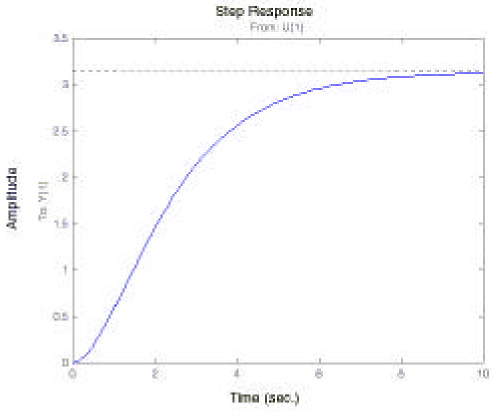
$$G_0(s) = \frac{654.4}{ps^3 + 319.53s^2 + 537.21s + 208.3}$$

Divido `num0` e `den0` per p , in modo da mettere in evidenza i poli:

$$G_0(s) = \frac{208.3}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 66.304}$$

Ora le risposte all'impulso e al gradino sono:





I poli della $G_0(s)$ sono:

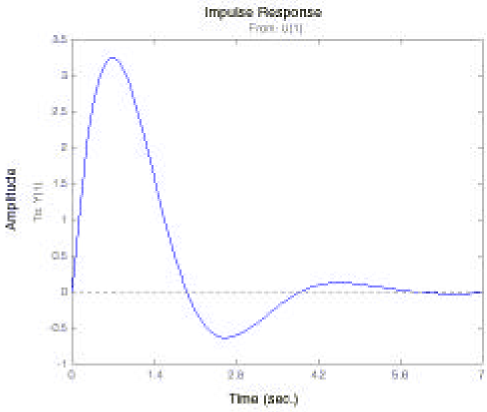
```
roots(den0)
-100.0067
-1.1012
-0.6021
```

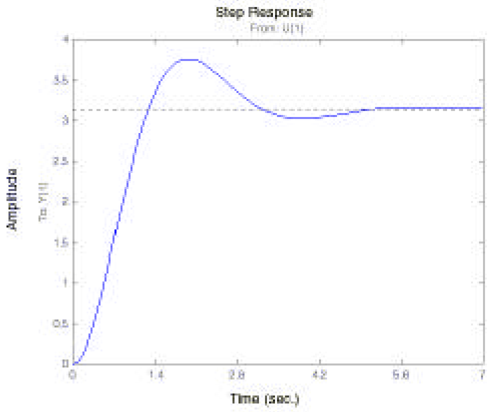
cioè sono ancora tutti a parte Reale < 0.

Studio per K=50

$$G_0(s) = \frac{1041.5}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 331.52}$$

Le <u>risposte all'impulso</u> e <u>al gradino</u> sono:





I poli della $G_0(s)$ sono:

```
roots(den0)
-100.03
-0.84 + 1.62j
-0.84 - 1.62j
```

Ora due poli sono diventati complessi e coniugati a parte Reale < 0, infatti la risposta al gradino ha delle sovraelongazioni, è oscillante.
All'aumentare del guadagno K abbiamo visto che il sistema è diventato più veloce (vedi le risposte); abbiamo spostato la posizione dei poli in Anello Chiuso.
Attento che se aumentiamo troppo il valore di K potremmo anche ottenere un sistema Instabile, cioè potremmo spostare i poli nel semipiano positivo dell'Asse Reale. (vedi luogo delle radici)

Specifiche del sistema

Vediamo di calcolare le specifiche più importanti del sistema. Poniamo **K=1**.
Si tratta di un sistema del 3° Ordine, ma un polo (`-100`) è totalmente dominato dagli altri due, quindi posso non considerarlo:

```
numG=20.83
denG=[1 1.71 0]
```

Ridefnisco la $G_0(s)$ con `feedback`:

```
[num0,den0]=feedback(numG,denG,numH,denH,-1)
```

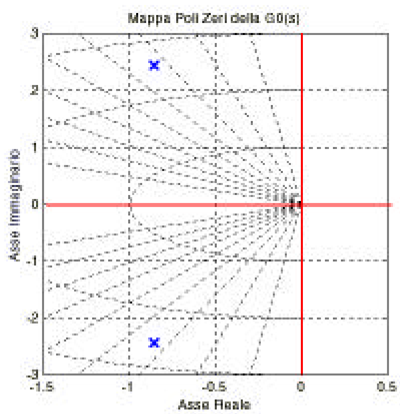
$$G_0(s)=\frac{20.83}{\underbrace{s^2+1.71s+6.63}_{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}}$$

$$p_{1/2}=-\delta\omega_n \pm j\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}_{\omega_d}$$

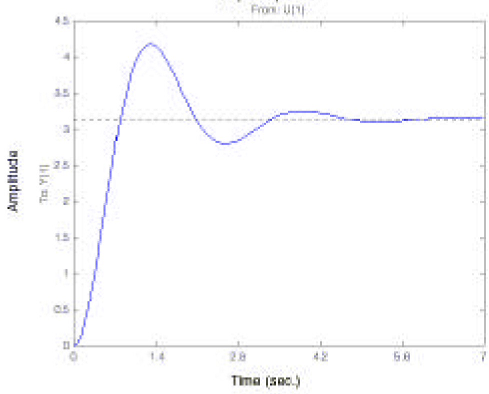
I poli della $G_0(s)$ sono:

```
roots(den0)
-0.855 + 2.43j
-0.855 - 2.43j
```

La mappa poli-zeri è:



La risposta al gradino è:



w_n

$w_n = \sqrt{6.63}$ → `wn=sqrt(den0(3))`

```
wn=2.575
```

d

$d = \dfrac{1.71}{2w_n}$ → `d=den0(2)/(2*wn)`

```
d=0.332
```

(vedi mappa poli-zeri)

Con questo valore così piccolo di δ mi aspetto una Massima Sovraelongazione Percentuale (`msp`) abbastanza elevata ed un Tempo di Picco (`tp`) molto piccolo.

MASSIMA SOVRAELONGAZIONE PERCENTUALE

$$\underbrace{MS_{\%} = \frac{y(tp) - y(\infty)}{y(tp)}}_{definizione} \cdot 100 = e^{-\frac{pd}{\sqrt{1-d^2}}} \cdot 100$$

```
msp=100*exp((-pi*d)/sqrt(1-d^2)
```

```
msp= 33.0915 %
```

Un altro modo di calcolarla è quello di usare la definizione:

Calcolo $y(tp)$, il valore massimo assunto dalla risposta al gradino:

```
T=0:0.1:100;
y=step(num0,den0,T);
ymax=max(y) → ymax=4.181
```

Calcolo $y(\infty)$, il valore a regime. $y(\infty)$ è il $\lim\limits_{s\to 0} G_0(s)$ (vedi Th. del Valore Finale), quindi è pari al rapporto tra i termini noti di `num0` e `den0.`

`yfin=num0/den0(3)` → `yfin=3.1416=`p

quindi:

```
msp=100*(ymax-yfin)/yfin → msp=33.0868 %
```

TEMPO DI PICCO
Per definizione è l'ascissa della `ymax=` $y(tp)$.

```
[ymax,i]=max(y)
```

ottengo `i=14`, che è l'indice del vettore dei tempi `T.`

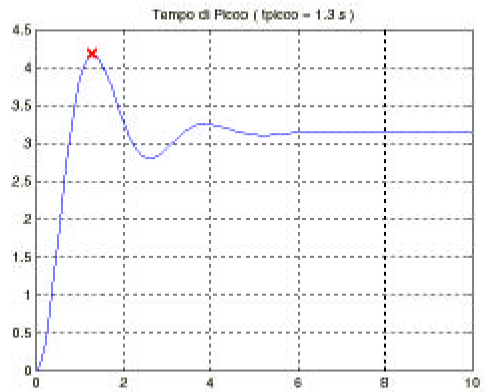
```
tp=T(14) → tp=1.3 sec
```

Per calcolarlo posso anche usare la formula:

$$tp = \frac{p}{w_d} \qquad \text{dove} \qquad w_d = w_n\sqrt{1-d^2}$$

```
wd=wn*sqrt(1-d^2) → wd=2.4289
tp=pi/wd → tp=1.2934 sec
```

Vediamolo nella risposta al gradino:



TEMPO DI ASSESTAMENTO AL 2%

```
T=0:0.1=10;
l=length(T) → l=101
[y,s]=step(num0,den0,T);
```

Ora nel vettore `y` ho i valori della risposta al gradino. Percorro questo vettore partendo dalla fine (da destra nel grafico) per vedere sino a quando la `y` rimane nella banda del ±2%

```
while y(l)>0.98*yfin & y(l)<1.02*yfin,
l=l-1;
end
```

(attento alla punteggiatura del ciclo `while`!)

Alla fine del ciclo uscirò con l'indice voluto: `l=44.`
Vedo il tempo di assestamento nel vettore dei tempi:

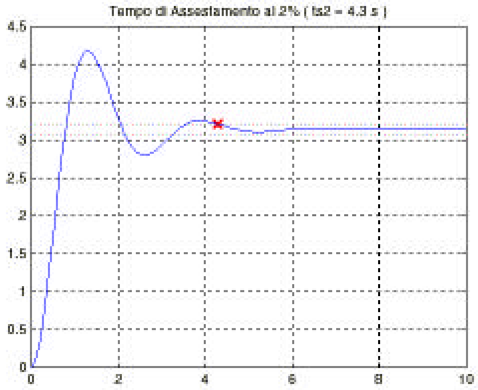
```
ts2=T(l) → ts2=4.3 sec
```

Un altro metodo è quello di usare la formula approssimata:

$$t_s(2\%) \; ; \; \frac{4}{dw_n}$$

```
ts2=4/(d*wn) → ts2=4.6784 sec.
```

Vediamolo nella risposta al gradino:


Tempo di Assestamento al 2% (ts2 = 4.3 s)
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10

Luogo delle Radici di $G_0(s)$ al variare del guadagno K dell'amplificatore

Torniamo al sistema del 3° ordine:

$$G(s)=\frac{20.83}{s(s+100)(s+1.71)}=\frac{20.83}{s^3+101.71s^2+171s};\quad H(s)=\frac{1}{p}$$

$$G(s)\,H(s)=\frac{6.6304}{s^3+101.71s^2+171s}$$

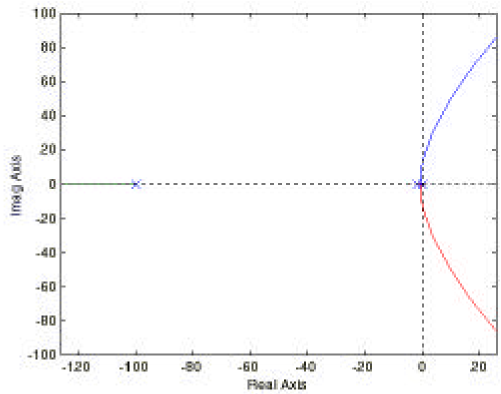
$$\left(G_0(s)=\frac{20.83\ \mathrm{K}}{s^3+101.71s^2+171s+20.83\ \mathrm{K}}\right)$$

G(s)H(s) ha 3 poli e nessuno zero, quindi mi aspetto 3 rami che vanno ad ∞ → 3 asintoti.

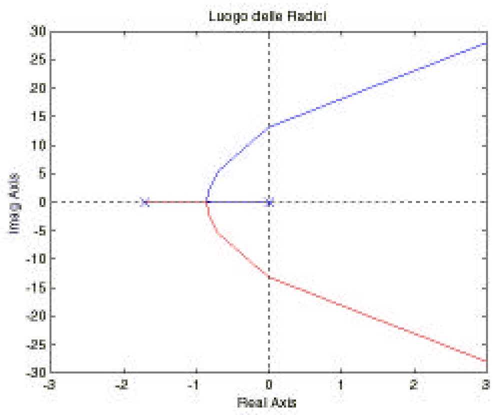
```
numGH=6.6304
denGH=[1 101.71 171 0]

roots(denGH)
0
-1.71
-100
```

Traccio il luogo con la funzione `rlocus(num,den)`, dove `num` e `den` si riferiscono alla G(s)H(s)!!!

```
rlocus(numGH,denGH)
```



Zoom sui due poli dominanti:



Studio della Stabiltà con il Criterio di Routh

L' equazione caratteristica è:

$$q(s) = \underbrace{s^3 + 101.71 s^2 + 171 s + 6.63 K}_{numGH + denGH}$$

Tabella di Routh:

s^3	1	171	
s^2	101.71	6.63K	
s^1	17392-6.63K		17392>6.63K $\Rightarrow$ K<2623.2
s^0	6.63K		K>0

$K < 0$

2 Poli Stabili (Re>0) e 1 Polo Instabile (Re<0) → INSTABILE

$0 < K < 2623.2$

3 Poli Stabili (Re<0) → ASINTOTICAMENTE STABILE

$K > 2623.2$

2 Poli Instabili (Re>0) e 1 Polo Stabile (Re<0) → INSTABILE
(passaggio dei 2 poli complessi e coniugati a destra dell'Asse Immaginario)

Studio gli estremi:

$K = 0$

annulla solo l'ultima riga → corrisponde al polo nell'origine
Osservando la Tabella ho 2 Poli Stabili (Re<0) ed un polo in O (Re=0) → SEMPLICEMENTE STABILE

$K = 2623.2$

annulla un'intera riga della Tabella, quindi devo ricorrere all'Equazione Ausiliaria:

$$q'(s) = 101.71 s^2 + 6.63K = 101.71 s^2 + 17392 = 0$$

La derivo e continuo la Tabella scrivendo questi coefficienti nella riga che si era annullata:

$$2 \cdot 101.71 s = 203.42 s$$

s^3 1

s^2 101.71 17392

----

s^1 203.42 0

s^0 17392

Nella prima parte della Tabella c'è 1 Permanenza → 1 Polo Stabile (Re<0), mentre lella seconda parte ci sono 2 Permanenze che corrispondono a 2 Poli Immaginari Puri (Re=0). Queste sono le intersezioni del Luogo con l'Asse Immaginario.
In definitiva per K=2623.2 ho che il sistema è SEMPLICEMENTE STABILE.

Le intersezioni con l'Asse Immaginario le ottengo sostituendo K=2623.2 nell'Equazione Ausiliaria:

$$q'(s) = 101.71s^2 + 17392 = 0 \Rightarrow s_{1/2} = \pm 13.1j$$

Il punto doppio sull'asse Reale lo ottengo dalla derivata prima dell'Equazione caratterstica:

$$q(s) = s^3 + 101.71s^2 + 171s + 6.63K$$

$$\frac{dq(s)}{ds} = 3s^2 + 203.4s + 171 = 0$$

$$s_{1/2} = \begin{cases} -0.85 \\ -66.95 \notin \text{ Luogo } \Rightarrow \text{lo scarto} \end{cases}$$

Quindi:

$$s = -0.85$$

a cui corrisponde un valore di K (lo metto nella q(s)):

$$K = 10.93$$

Esempi di Sintesi

1. Voglio una Max Sovraelongazione Percentuale del 25%. Che valore del guadagno K devo usare?

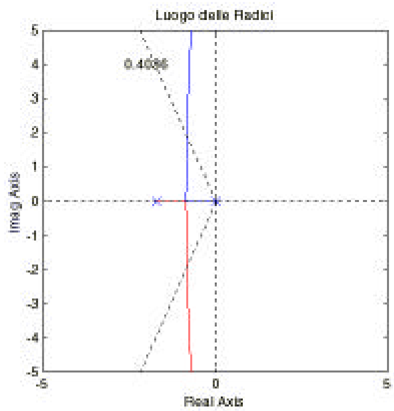
$$MS_{\%} = e^{-\frac{pd}{\sqrt{1-d^2}}} \cdot 100 = 25\%$$

risolvendo l'equazione ottengo:

$$d^2 = 0.163 \;\Rightarrow\; d = 0.4036$$

(ovviamente valori di d maggiori mi danno MS% minori).
Noto d voglio sapere il K corrispondente. Sul Luogo delle Radici disegno le due rette corrispondenti a quel d con:

`sgrid(`d, w_n`)` → `sgrid(0.4036, [])`



Graficamente vedo qual'è il punto a cui corrisponde una MS% = 25%; per trovare il valore di K uso `rlocfind():`

```
[k,poli]=rlocfind(numGH,denGH)
```

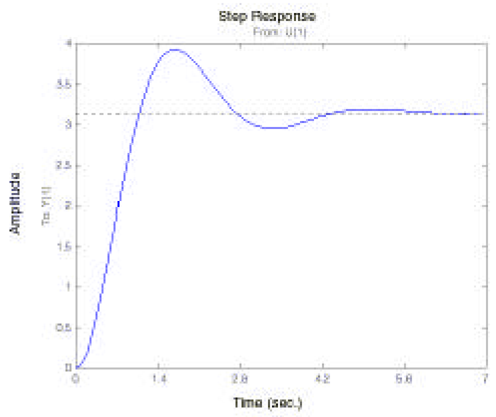
e clicco sul un'intersezione (meglio `zoom`are prima e ricordarsi di fare poi `zoom off`).
`rlocfind` mi restituisce:

```
K=64.068

poli:
-100.04
-0.83 + 1.88 j
-0.83 - 1.88 j
```

Per `K=64.068` la f.d.t. in Anello Chiuso è:

$$G_0(s) = \frac{1333.12}{s^3 + 101.71s^2 + 171s + 424.3453}$$

la cui risposta al gradino è:



2. Voglio K tale che il Tempo di Assestamento al 2% sia minore di 2 sec.

$$t_s(2\%) \; ; \; \frac{4}{dw_n} = 8 \text{ sec} \quad \Rightarrow \quad dw_{\text{n}} = 0.5$$ = modulo della Parte Reale dei poli

Traccio una retta verticale di ascissa `-0.5` e dal grafico, con `rlocfind():`

```
[k,poli]=rlocfind(numGH,denGH)
```

ottengo:

```
K=883.9

poli:
-100.59
-0.56 + 7.61j
-0.56 - 7.61j
```

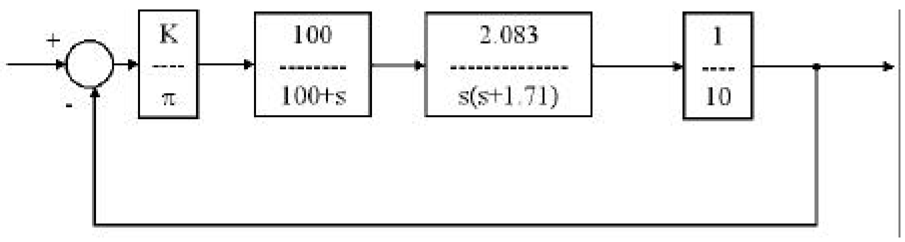
In definitiva per avere un $t_s(2\%) < 8$ sec, deve essere:

$$dw_{\text{n}} > 0.5 \quad \Rightarrow \quad \text{K} < 883.9$$

3. Voglio che siano soddisfatte contemporaneamente le seguenti specifiche:

$$M_P \le 25\%$$
$$t_S(2\%) \le 2s$$
$$K_V = 20$$

Va notato che K_V è definito per una retroazione unitaria, che il nostro sistema non ha, quindi, facendo uso dell'algebra dei blocchi, giungiamo allo schema:



```
num=(100*2.083)/(10*pi)
den=conv([1 100],[1 1.71 0])

                6.6304
G(s)=   ------------------------
        s^3 + 101.71 s^2 + 171 s
```

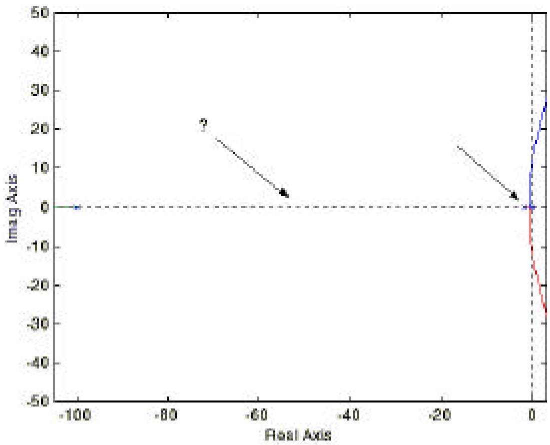
$$K_V = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = 0.0388 \cdot K = 20 \quad \Rightarrow \; K = 515.5$$

La specifica sul tempo di assestamento pone:

$$t_S(2\%) \cong \frac{4}{dw_n} = 2s \;\Rightarrow\; dw_n = 2$$

(minimo tempo di assestamento; tempi minori corrispondono a valori di dw_n maggiori).
La specifica sulla Mp (vedi sopra) mi imponeva un $d \geq 0.4036$, per cui voglio che il mio luogo delle radici passi per i punti individuati da d e dw_n, con quel valore di K.
Voglio 'traslare' il luogo.

<u>SINTESI</u> <u>PER</u> <u>CANCELLAZIONE</u> (applicabile solo per poli nel semipiano sx)



Voglio mettere uno zero in –1.71 ed un polo più spostato verso sinistra.

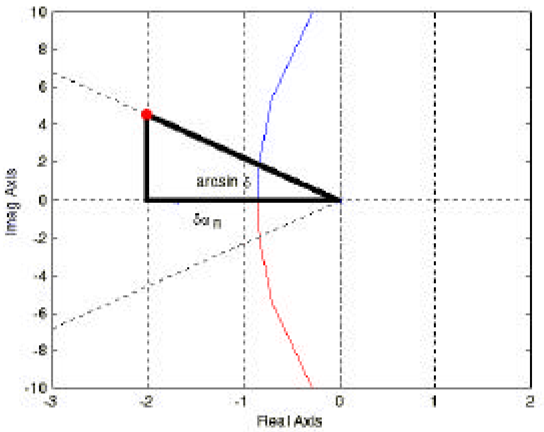
Per trovare la posizione del polo incognito da inserire, calcolo la somma delle fasi di tutti i poli rispetto a quel punto di passaggio e la pongo essere 180°. In questa relazione l'unica incognita è la fase del nuovo polo.

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = \text{-}100$$
$$p_X = ?$$

Indico le rispettive fasi con q_1, q_2, q_X.

```
teta=acos(0.4036)        (teta=1.1553)
teta1=pi-teta            (teta1=1.9863)
```

Da considerazioni di carattere trigonometrico sul triangolo ingrossato, ricavo l'ordinata del punto di passaggio.



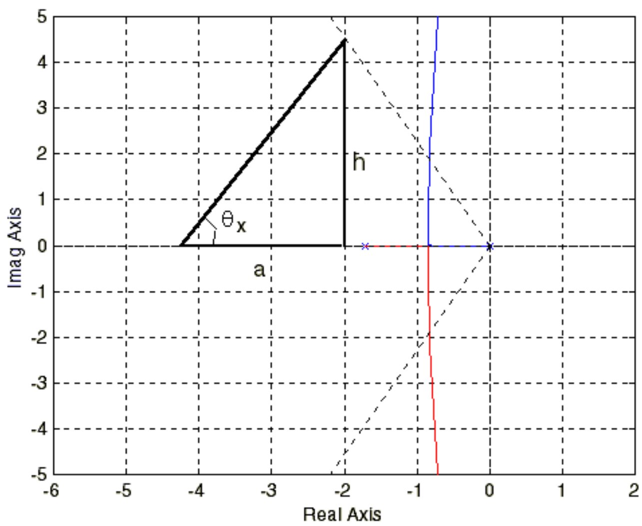

```
d=0.4036
ipotenusa=2/d                               (ipotenusa=4.95)
h=ipotenusa*sin(acos(0.4036))               (h=4.53)
```

Ora calcolo θ_2:

```
teta2=atan(4.63/98)                         (teta2=0.0472)
```

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_X = \pi$$

```
tetax=pi-teta1-teta2                        (tetax=1.1081)
```



$$\tan\theta_X = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{h}{\tan\theta_X}$$

```
a=h/tan(tetax)             (a=2.2615)
```

quindi il polo sarà in `-4.2615.`

$$G_C(s) = \frac{s+1.71}{s+4.2615}$$

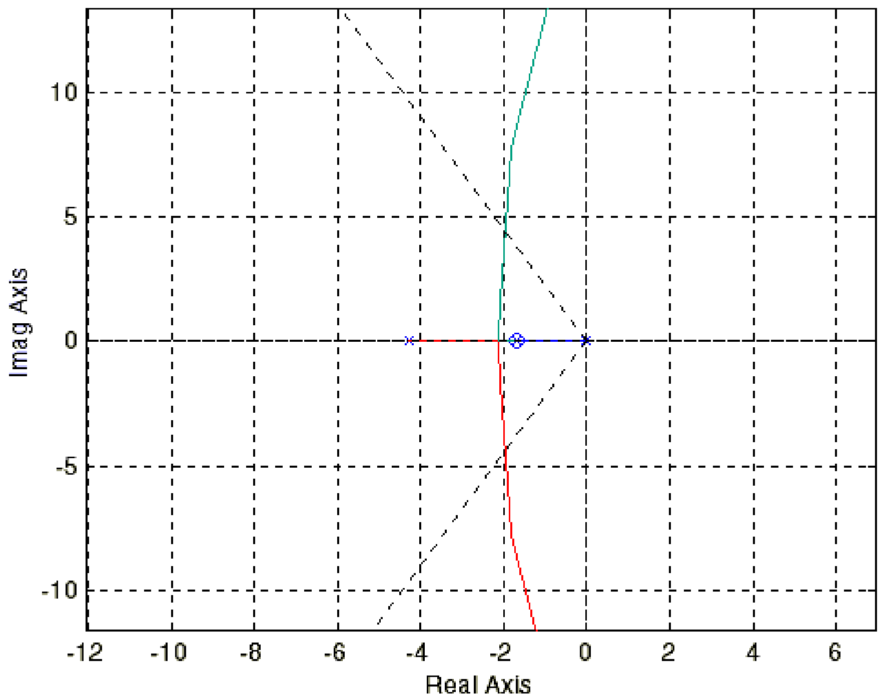
che scrivo nella forma di costanti di tempo $\dfrac{\dfrac{1}{1.71}s+1}{\dfrac{1}{4.2615}s+1}=\dfrac{0.5848s+1}{0.2347s+1}$ per non cambiare il guadagno.

Inserisco questa rete nel sistema:

```
numR=[0.5848 1]

denR=[0.2347 1]

printsys(numR,denR)

   0.5848 s + 1
   ------------
   0.2347 s + 1

[numC,denC]=series(num,den,numR,denR)

printsys(numC,denC)

                    3.8775 s + 6.6304
   -----------------------------------------------
   0.2347 s^4 + 24.8713 s^3 + 141.8437 s^2 + 171 s
```

Traccio il nuovo luogo delle radici e verifico che passa per il punto desiderato:

```
rlocus(numC,denC)
grid
sgrid(0.4036, [])
```



Vedo con quale valore di K passa per quel punto:

```
rlocfind(numC,denC)
Select a point in the graphics window
```

```
selected_point =

  -1.9747 + 4.1667i

ans =

  130.1413
```

Questo valore non soddisfa però la specifica sull'errore $K_V = 20$. Facendo i conti, in questa situazione risulta un $K_V = 5.8$, quindi devo aumentare il K di un fattore pari a $\frac{20}{5.8} = 3.46$. Questo aumento del valore del K, però, porta i poli in un'altra posizione. Potrei quindi fare questa sintesi con una rete ritardatrice.